

基于全概率公式的 M-APSK 误码率分析模型

郝浩, 任科学

(北京理工大学信息与电子学院, 北京 100081)

摘要: 为有效评估加性白高斯噪声信道中 M-APSK 的性能, 提出了一种基于全概率公式的理论误码率分析模型。首先根据星座点分布及其编码特点对星座平面进行区域划分, 然后由接收符号落在相应区域的概率推导出各比特的判决错误概率表达式, 最后得到理论误码率的精确闭式解。以 16APSK 和 32APSK 为例, 推导出了其各类星座图的理论误码率计算公式, 与 Monte Carlo 仿真结果非常吻合。模型具有通用性, PSK、QAM、PAM、APSK 等调制方式均可利用该模型得到理论误码率的精确闭式解。相较于依赖大量数值计算的复杂二维概率积分方法, 所提模型能够更方便地给出 M-APSK 的误码率性能。

关键词: 幅相调制; 理论误码率; 计算公式; 闭式解

中图分类号: TN911.3

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2024126

Bit error rate analysis model of M-APSK based on total probability formula

HUAN Hao, REN Kexue

School of Information and Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract: To efficiently evaluate the performance of M-APSK modulation scheme over an additive white Gaussian noise channel, a theoretical bit error rate analysis model was proposed based on total probability formula. Firstly, the constellation plane was divided into regions according to the distribution of constellation points and their encoding characteristics. Then, the probability expression of the decision error of each bit was derived from the probability of the received symbol falling in the corresponding region. Finally, the exact closed-form solution of theoretical bit error rate was obtained. Taking 16APSK and 32APSK as examples, the theoretical bit error rate formula of all kinds of constellations was derived, which was in excellent agreement with Monte Carlo simulation. This model is universal, PSK, QAM, PAM, APSK and other modulation methods can use this model to obtain the exact closed-form solution of theoretical bit error rate. Compared with the complex two-dimensional probability integral method which relies on a large number of numerical calculations, the proposed model can give the bit error rate performance of M-APSK more conveniently.

Keywords: M-APSK, theoretical bit error rate, calculation formula, closed-form solution

0 引言

系统误码率 (BER, bit error rate) 的精确分析通常是复杂的。文献[1]详细介绍了脉冲幅度调制 (PAM, pulse amplitude modulation)、相移键控

(PSK, phase-shift keying)、正交幅度调制 (QAM, quadrature amplitude modulation) 等几种调制方式的调制方法及其在加性白高斯噪声 (AWGN, additive white Gaussian noise) 信道中的理论误码率计

收稿日期: 2024-03-18; 修回日期: 2024-07-02

通信作者: 任科学, 1021358328@qq.com

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.62027801)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No.62027801)

算方法与性能分析。其中, BER 的计算要么借助误符号率 (SER, symbol error rate) 间接得到, 要么使用上下界估计。SER 一般需要对星座平面上的二维概率密度函数进行积分得到, 而更常用的 BER 计算则更为困难。

二进制相移键控 (BPSK, binary phase-shift keying) 和正交相移键控 (QPSK, quadrature phase-shift keying) 星座分布较为简单, 容易得到其理论 BER 的精确闭式解^[1]。Pil^[2]利用 8PSK 星座点分布的对称关系, 推导出了 8PSK 调制的理论 BER 计算公式。对于 16PSK 及更高阶次调制, 目前主要采用积分式的数值计算方法进行精确分析, 或者使用近似的闭合表达式^[3-4]进行粗略分析。Lu 等^[3]提出了一种几何方法, 利用信号空间概念推导出了格雷码映射的 PSK 和矩形 QAM 的理论 BER 近似计算公式, 这为理论误码率的分析提供了一种有益的方法。然而其计算公式存在缺陷, 调制阶次越高, 误差越大, 应用价值越有限。

目前, QAM 的 BER 通用计算公式的研究较多^[3,5-10], 其星座点分布方式比较规则, 分析与计算上相对简单。相较于 QAM, 幅度相移键控 (APSK, amplitude phase-shift keying) 调制的误码率计算则更为复杂, 这是由于其星座点分布在多个不同半径的环上, 星座点间的欧氏距离种类增多。即使同一阶次的 APSK 调制也具有不同的星座点分布方式, 且对应不同的性能曲线。APSK 在 DVB-S2/S2X^[11-14] 中的成功应用吸引了大量学者对其传输性能进行研究^[15-21]。然而, 目前对 APSK 误码率的研究大多使用最小欧氏距离准则确定的上下界来估计 SER^[16-17], 而 BER 的估计往往来自 Monte Carlo 仿真结果^[18], 或直接使用相同阶次的 QAM 的 BER 曲线来近似, 这对于误码率性能的精细评估是非常不利的。Monte Carlo 仿真尽管趋于理论真值, 但存在计算量大、依赖于随机性等缺点, 在有限的计算资源下, 只能获取一定范围内离散的信噪比取值对应的仿真误码率, 难以精细刻画整个误码率曲线。利用相同阶次的 QAM 对 APSK 近似估计的方法精度不够高, 也无法刻画同一阶次、不同星座点分布的 APSK 传输性能差异细节。因此, 为获取 APSK 精确、完整的理论误码率曲线, 研究其理论误码率的计算方法是很有必要的。

本文主要的研究工作如下。

1) 基于全概率公式, 提出了一种简单的误码率分析模型, 介绍了模型的分析思路、误码率推导步骤、模型的通用性等。

2) 将本文所提模型推导的 16PSK、16QAM、32QAM 等理论误码率计算公式与文献公式、Monte Carlo 仿真结果等进行对比, 验证了模型对 PSK 和 QAM 的适用性与结论的精确性。

3) 将本文所提模型应用于 APSK 的误码率分析, 推导出了 16APSK 和 32APSK 的几种典型星座点分布的理论 BER 计算公式。将计算结果与 Monte Carlo 仿真结果进行对比, 两者非常吻合, 验证了模型对 APSK 的适用性与结论的精确性。

1 基于全概率公式的误码率分析模型

设调制阶次为 M , 则发射端调制符号可表示为 $s = a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$, 其中 $n = \text{lb}M$ 。各比特判决错误概率记为 $P_e(a_i), i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, 则接收符号的 BER 为

$$P_b = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P_e(a_i) \quad (1)$$

以某个调制符号的第 i 比特 a_i 为例, 在先验等概率发送假设下, 其发送比特为 0 或 1 的概率均为 $\frac{1}{2}$, 接收端判决为 \hat{a}_i 。根据全概率公式, 其判决错误概率为

$$P_e(a_i) = \frac{1}{2} P(\hat{a}_i = 1 | a_i = 0) + \frac{1}{2} P(\hat{a}_i = 0 | a_i = 1) \quad (2)$$

记 s_0 是与 a_i 对应位置为比特 0 的标准星座点集合, s_1 是与 a_i 对应位置为比特 1 的标准星座点集合, 其第 k 个元素分别为 $s_{0(k)}$ 和 $s_{1(k)}$, 其中 $k = 0, 1, 2, \dots, \frac{M}{2} - 1$ 。再次根据全概率公式对式(2)进一步分解, 则有

$$\begin{cases} P(\hat{a}_i = 1 | a_i = 0) = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} P(\hat{a}_i = 1 | s = s_{0(k)}) \\ P(\hat{a}_i = 0 | a_i = 1) = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} P(\hat{a}_i = 0 | s = s_{1(k)}) \end{cases} \quad (3)$$

由式(2)和式(3)可得

$$P_e(a_i) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} [P(\hat{a}_i = 1 | s = s_{0(k)}) + P(\hat{a}_i = 0 | s = s_{1(k)})] \quad (4)$$

根据式(4), 只需逐一计算出各个条件概率

$P(\hat{a}_i = 1|s = s_{0(k)})$ 和 $P(\hat{a}_i = 0|s = s_{1(k)})$ (其中 $k = 0, 1, 2, \dots, \frac{M}{2} - 1$), 即可得到 a_i 的判决错误概率 $P_e(a_i)$ 。为计算这些条件概率, 首先对星座平面进行判决区域划分。

以 QPSK 为例, 如图 1 所示, 与第 1 比特 a_1 对应的 2 种星座点集合为 $s_0 = \{00, 10\}$ 和 $s_1 = \{01, 11\}$ 。从符号判决角度, 当接收符号 r 落在第一象限时将被判决为 $s_{0(0)}$, 则 $s_{0(0)}$ 的符号判决区域为第一象限, 记为 $S_{0(0)}$ 。同理, $s_{1(0)}$ 、 $s_{1(1)}$ 和 $s_{0(1)}$ 的符号判决区域分别记为 $S_{1(0)}$ 、 $S_{1(1)}$ 和 $S_{0(1)}$, 这是星座平面的符号判决区域划分, 可用于 SER 的计算。从比特判决角度, 当接收符号 r 落在 Q 轴左侧 (图 1 中阴影区域) 时比特 a_1 被判决为 1, 则 s_1 的比特判决区域为 Q 轴左侧区域并记为 S_1 。同理, s_0 的比特判决区域为 Q 轴右侧区域并记为 S_0 , 这是星座平面关于 a_1 的比特判决区域划分, 可用于 BER 的计算。

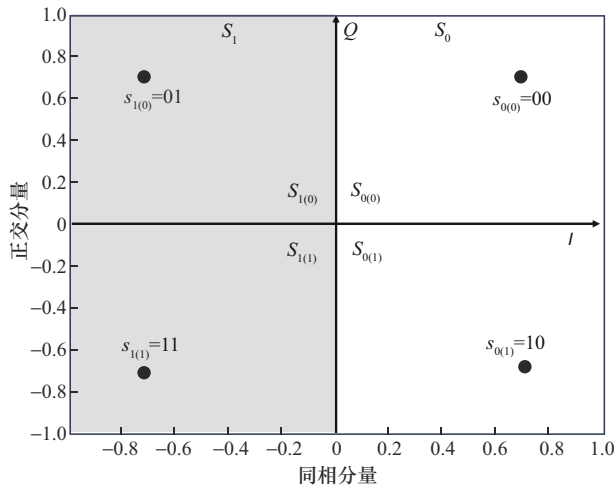


图1 QPSK($a_0 a_1$)标准星座图的符号判决区域划分和关于 a_1 的比特判决区域划分

考虑当发送符号 $s \in s_0$ 时, 式(4)中第 k 个条件概率为 $P(\hat{a}_i = 1|s = s_{0(k)})$ 。把 a_i 判决为 $\hat{a}_i = 1$ 等价于接收符号 r 落在在区域 S_1 , 表示为 $r \in S_1$, 则此条件概率可转化为在星座图上计算发送符号 $s = s_{0(k)}$ 条件下接收符号 r 落在在区域 S_1 的概率, 可根据 r 的概率密度函数或分布函数进行计算。由此, 式(4)可转化为

$$P_e(a_i) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} P(r \in S_1 | s = s_{0(k)}) + \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} P(r \in S_0 | s = s_{1(k)}) \quad (5)$$

其中, S_0 和 S_1 是标准星座图关于第 i 比特 a_i 的比特判决区域, 不同的比特对应不同的 S_0 和 S_1 。

由此可见, 式(5)具有明确的物理意义和清晰的计算逻辑。根据式(5), 要计算某一比特 a_i 的判决错误概率, 只需遍历标准星座图中每个发送符号, 计算接收符号 r 落在关于 a_i 的相应比特判决区域的条件概率, 然后对这些条件概率取平均。

星座点分布方式与编码方式 (如格雷码、自然码等) 决定了符号判决区域和比特判决区域的划分方式, 信道特性 (如 AWGN 信道、瑞利信道^[22]等) 决定了接收符号 r 落在星座平面位置的概率密度函数。因此, 在给定星座点分布方式、编码方式和信道特性的情况下, 式(5)中的所有条件概率是确定的。

现依据上述模型分析思路, 将 BER 的分析步骤总结如下。

步骤1 根据星座点分布及其编码特点对星座平面进行比特判决区域划分。

步骤2 根据信道特性确定接收符号的概率分布。

步骤3 利用式(5)得到各比特的判决错误概率表达式。

步骤4 由式(1)得到理论 BER 计算公式。

显然, 该模型的复杂度与星座点分布方式、编码方式、信道特性、调制阶次等有关。比如在 AWGN 信道中, 接收符号的位置服从正态分布, 式(5)中的条件概率可直接由星座点到判决区域边界的欧氏距离得到^[3]。

本文所提模型未对调制方式、星座图编码方式、信道特性等做出限制, 具有一般性和通用性。根据上述分析步骤, 可推导出格雷码编码下的典型 PSK、PAM 和 QAM 星座图在 AWGN 信道中的理论误码率计算公式。接下来, 首先将推导出的 PSK 和 QAM 模型公式与文献公式进行对比分析, 以验证模型的可行性与结论的精确性, 然后将模型应用于格雷码编码中 APSK 的理论误码率计算。

2 PSK 和 QAM 的理论误码率

2.1 PSK

表 1 给出了由本文所提模型推导的几种典型 PSK 调制的理论误码率计算公式 (模型公式)。其中, $\frac{E_b}{N_0}$ 表示以 dB 为单位的比特信噪比, BPSK、QPSK、8PSK 与常用公式^[1-3]相同, 表明该模型可

以用来推导 PSK 的理论误码率。对于 16PSK 以及更高阶次的 PSK，除文献[3]给出的近似公式外，通常只能采用星座平面二维概率积分的数值计算方法得到理论误码率，这种直接积分的结果是比较精确的，可以用来检验模型公式的精确性。

表 1 PSK 调制的理论误码率模型公式

调制方式	模型公式
BPSK、QPSK	$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$
8PSK	$\frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{6E_b}{N_0}}\sin\frac{\pi}{8}\right) + \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{6E_b}{N_0}}\sin\frac{3\pi}{8}\right) -$
	$\frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{6E_b}{N_0}}\sin\frac{\pi}{8}\right)Q\left(\sqrt{\frac{6E_b}{N_0}}\sin\frac{3\pi}{8}\right)$
16PSK	$\frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{8E_b}{N_0}}\sin\frac{(2i-1)\pi}{16}\right) -$
	$\frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{8E_b}{N_0}}\sin\frac{\pi}{16}\right)Q\left(\sqrt{\frac{8E_b}{N_0}}\sin\frac{5\pi}{16}\right) -$
	$\frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{8E_b}{N_0}}\sin\frac{3\pi}{16}\right)Q\left(\sqrt{\frac{8E_b}{N_0}}\sin\frac{7\pi}{16}\right) -$
	$\frac{1}{4}Q\left(\sqrt{\frac{8E_b}{N_0}}\sin\frac{\pi}{16}\right)Q\left(\sqrt{\frac{8E_b}{N_0}}\sin\frac{7\pi}{16}\right) -$
	$\frac{1}{4}Q\left(\sqrt{\frac{8E_b}{N_0}}\sin\frac{3\pi}{16}\right)Q\left(\sqrt{\frac{8E_b}{N_0}}\sin\frac{5\pi}{16}\right)$

下面以 16PSK 为例，将模型公式与文献公式进行对比，验证模型公式的精确性。

根据文献[2]推导的 16PSK 理论误码率近似公式为

$$P_b(16PSK) = \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{8E_b}{N_0}}\sin\frac{(2i-1)\pi}{16}\right) \quad (6)$$

对比可知，该近似公式只是表 1 中 16PSK 模型公式的一部分。

将 16PSK 模型公式、近似公式和直接积分的结果进行对比，如图 2 所示，可见三者曲线几乎重合，吻合度非常好，表明模型公式、近似公式和直接积分都具有很高的精度。

图 3 给出了 16PSK 计算公式相对于直接积分的误差曲线。可以看出，模型公式和近似公式的 BER 相对误差绝对值均随比特信噪比的增加而急剧减小，且总体上模型公式误差绝对值更小，表明模型公式比近似公式精度更高。

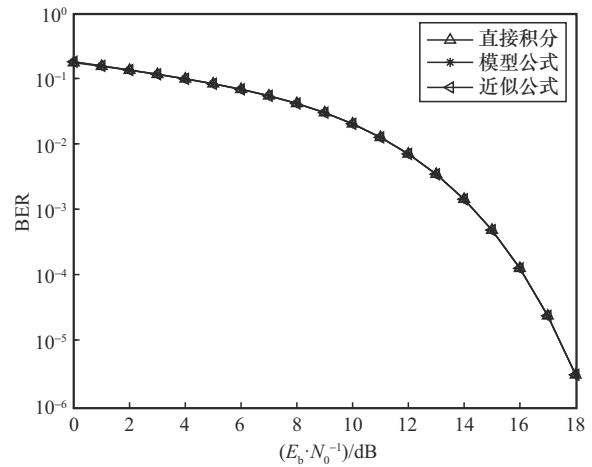


图 2 16PSK 理论误码率曲线对比

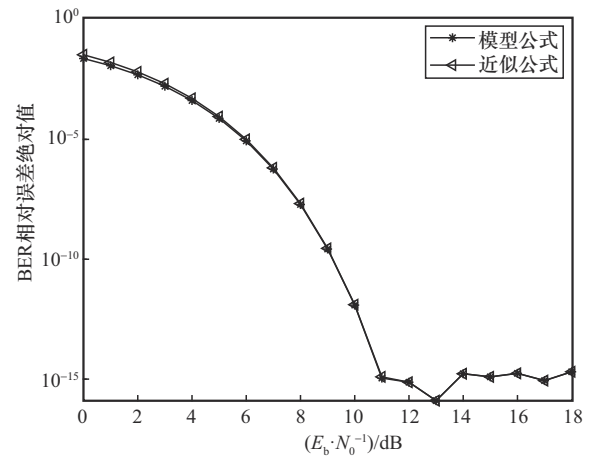


图 3 16PSK 计算公式相对于直接积分的误差曲线

由表 1 还可看出，随着阶次升高，模型公式所含的项数急剧增加，16PSK 模型公式包含 Q 函数的一次项和二次项各 4 项（不妨将 2 个 Q 函数相乘看作其二次项）。

高阶 PSK 调制的误码率分析过程与低阶调制一致，只不过分析复杂度随阶次的增加而增加，公式中也将包含更多的项数。但由于每个比特划分的区域都仅由一条或两条边界线确定，因此 PSK 的理论误码率计算公式仅含一次项和二次项。

2.2 QAM

仅以 16QAM 和 32QAM 为例，通过对比分析来验证误码率分析模型对 PAM 和 QAM 的适用性。而 PAM 可看作相应阶次 QAM 的一维简化，不再单独讨论。

1) 16QAM

表 2 给出了 16QAM 理论误码率的模型公式与常

用公式^[8]对比情况。其中, $d = \sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}}$ 。

表 2 16QAM 理论误码率的模型公式与常用公式对比情况

模型公式	常用公式
$\frac{3}{4}Q(d) + \frac{1}{2}Q(3d)$	$\frac{3}{4}Q(d) + \frac{1}{2}Q(3d)$
$-\frac{1}{4}Q(d)Q(5d)$	$-\frac{1}{4}Q(5d)$

由表 2 可以看出, 2 个公式非常接近, 但模型公式包含 Q 函数的二次项, 这与比特判决区域的边界情况一致 (16QAM 关于 a_1 的比特判决区域划分如图 4 所示, 其非阴影区域由 q_1 和 q_2 两条边界线确定)。因此, 模型公式可以视为对常用公式的修正。

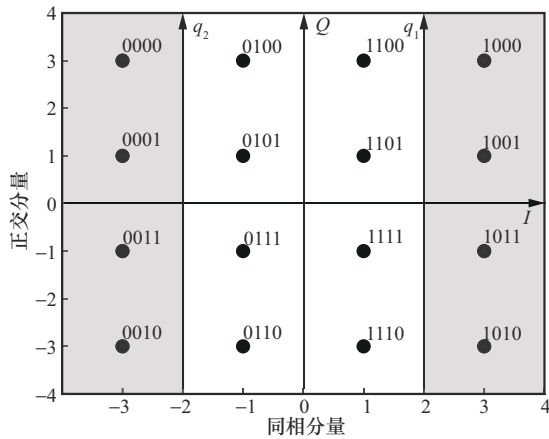


图 4 16QAM($a_0a_1a_2a_3$)关于 a_1 的比特判决区域划分

16QAM 计算公式的精度可由 MATLAB 进行 Monte Carlo 仿真来验证。Monte Carlo 仿真要求发送符号平均功率为 1, 经过给定比特信噪比取值的 AWGN 信道, 然后进行解映射, 并统计 BER。本文综合考虑精度与运算效率, 每组比特信噪比取值下用于 Monte Carlo 仿真的随机比特数均为 2×10^8 个。

在不同比特信噪比下, 对 16QAM 模型公式、常用公式与 Monte Carlo 仿真结果进行对比, 结果如图 5 所示, 可以看出三者曲线非常吻合。

2) 32QAM

目前 32QAM 的常用公式^[8]与本文推导的模型公式均包含大量的计算项, 此处不再列出, 仅给出曲线对比结果, 如图 6 所示。由图 6 可知, 模型公式与 Monte Carlo 仿真曲线几乎重合, 且明显优于文献^[8]提出的常用公式。

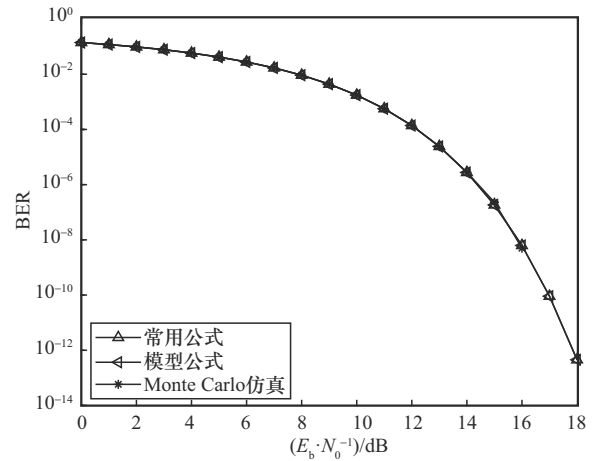


图 5 16QAM 模型公式、常用公式与 Monte Carlo 仿真对比

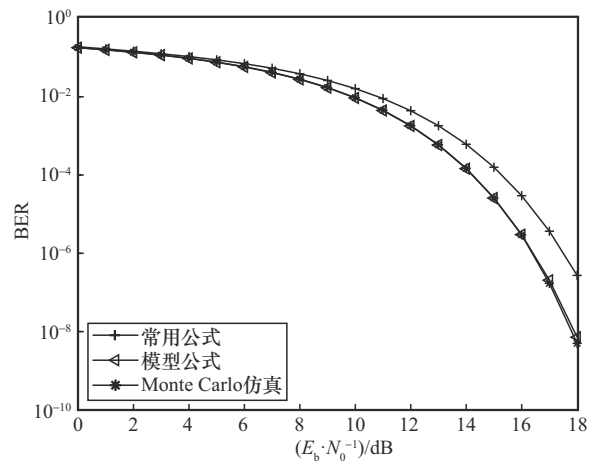


图 6 32QAM 模型公式、常用公式与 Monte Carlo 仿真对比

3 M-APSK 的理论误码率分析

M-APSK 的星座点分布方式更加多样, 即使同一阶次也具有不同的星座图样^[21], 这极大增加了理论误码率分析的工作量, 但与本文所提模型进行理论分析推导的步骤是一致的。下面以 DVB-S2/S2X 标准所用的 16APSK 的两大类星座点分布和 32APSK 的一种星座点分布为例, 介绍 M-APSK 的理论误码率分析计算方法。

3.1 16APSK(4+12APSK)调制的 BER 计算

DVB-S2/S2X 标准^[11-14]推荐的 16APSK (4+12APSK) 2/3 星座图如图 7 所示, 星座点分布在 2 个环上, 外环与内环半径比为 $\frac{r_2}{r_1} = \gamma$, 标准规定的低密度奇偶校验 (LDPC, low-density parity-check) 编码码率与 γ 的几种典型对应关系如表 3 所示。

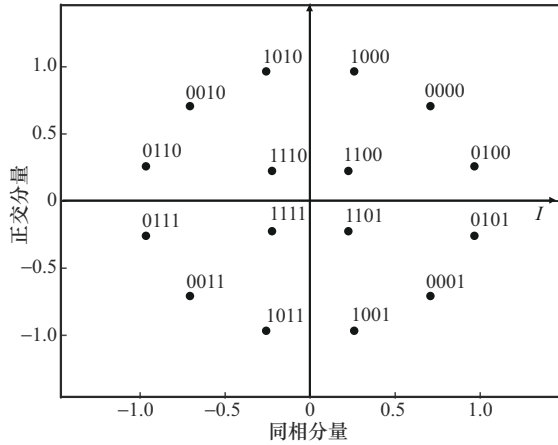


图7 DVB-S2X 16APSK(4+12APSK)2/3 星座图

表3 16APSK(4+12APSK)编码码率与 γ 的几种典型对应关系

编码码率	γ
$\frac{2}{3}$	3.15
$\frac{3}{4}$	2.85
$\frac{4}{5}$	2.75
$\frac{5}{6}$	2.70
$\frac{8}{9}$	2.60
$\frac{9}{10}$	2.57

根据星座点分布位置关系, 16APSK (4+12APSK) 内环半径 r_1 与平均比特能量 E_b 和半径比 γ 的关系为

$$r_1 = \sqrt{\frac{16E_b}{1 + 3\gamma^2}} \quad (7)$$

为简便起见, 令

$$D_1 = \frac{r_1}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}} = \sqrt{\frac{32E_b}{(1 + 3\gamma^2)N_0}} \quad (8)$$

其中, $\frac{N_0}{2}$ 是 AWGN 信道中噪声双边功率谱密度。

16APSK (4+12APSK) 的发送符号可表示为 $a_0a_1a_2a_3$ 。根据对称性, 有 $P_e(a_2) = P_e(a_3)$ 和 $P_e(a_0) = P_e(a_1)$, 因此只需考虑星座平面关于 a_2 和 a_0 这 2 种比特判决区域划分。而关于 a_2 的比特判决区域划分比较简单, S_0 和 S_1 以 Q 轴为区域边界, 由式(5)容易得到

$$P_e(a_2) = \frac{1}{4} Q\left(D_1 \sin \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 Q\left(\gamma D_1 \sin \frac{(2i-1)\pi}{12}\right) \quad (9)$$

16APSK (4+12APSK) 关于 a_0 的比特判决区域划分如图 8 所示, 阴影部分是 s_1 的比特判决区域 S_1 , 非阴影区域是 s_0 的比特判决区域 S_0 。 S_0 和 S_1 以 q_1 、 q_2 和圆 C 这 3 条判决轴为边界, 圆 C 半径为内外环半径平均值。

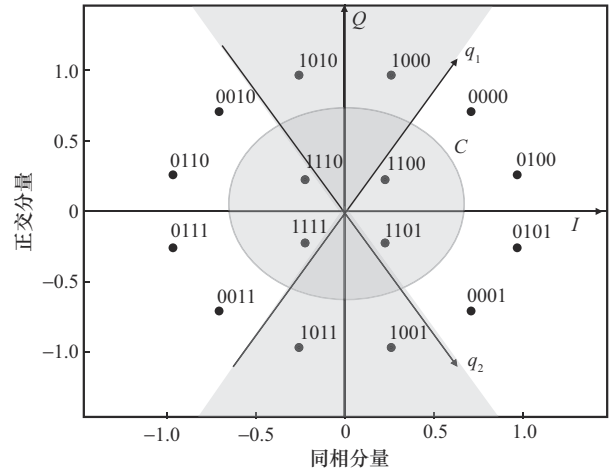


图8 16APSK(4+12APSK) ($a_0a_1a_2a_3$) 关于 a_0 的比特判决区域划分

设发送符号 s 幅值为 A ($A = \pm r_1$ 或 $A = \pm r_2$, 不妨认为发送符号在 Q 轴右侧时幅值为正, 在 Q 轴左侧时幅值为负), 则在 AWGN 信道中接收符号幅值 A_r 服从 $N\left(A, \frac{N_0}{2}\right)$ 的正态分布, 概率密度函数为

$$f(A_r) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(A_r - A)^2}{N_0}} \quad (10)$$

当发送符号在内环 ($A = \pm r_1$) 时, 根据对称性, 仅需考虑一个星座点, 容易得到接收符号落在圆 C 外的概率为

$$P_{C_1} = Q\left(\frac{\gamma - 1}{2} D_1\right) + Q\left(\frac{\gamma + 3}{2} D_1\right) \quad (11)$$

同理, 当发送符号在外环 ($A = \pm r_2$) 时, 接收符号落在圆 C 内的概率为

$$P_{C_2} = Q\left(-\frac{3\gamma + 1}{2} D_1\right) - Q\left(-\frac{\gamma - 1}{2} D_1\right) \quad (12)$$

从而可得到式(5)所需的各个条件概率。

$P(r \in S_1 | s = 0000)$ 的表达式为

$$P_{T_0} = P_{C_2} + (1 - P_{C_2}) Q\left(\gamma D_1 \sin \frac{\pi}{12}\right) \cdot \left[1 - Q\left(\gamma D_1 \sin \frac{5\pi}{12}\right)\right] + (1 - P_{C_2}) \left[1 - Q\left(\gamma D_1 \sin \frac{\pi}{12}\right)\right] Q\left(\gamma D_1 \sin \frac{5\pi}{12}\right) \quad (13)$$

$P(r \in S_1 | s = 0100)$ 的表达式为

$$P_{T_4} = P_{c_2} + (1 - P_{c_2})Q\left(\gamma D_1 \sin \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left[1 - Q\left(\gamma D_1 \sin \frac{5\pi}{12}\right)\right] + (1 - P_{c_2})\left[1 - Q\left(\gamma D_1 \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]Q\left(\gamma D_1 \sin \frac{5\pi}{12}\right) \quad (14)$$

$P(r \in S_0 | s = 1000)$ 的表达式为

$$P_{T_8} = (1 - P_{c_2})Q\left(\gamma D_1 \sin \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left[1 - Q\left(\gamma D_1 \sin \frac{\pi}{12}\right)\right] + (1 - P_{c_2})\left[1 - Q\left(\gamma D_1 \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]Q\left(\gamma D_1 \sin \frac{\pi}{12}\right) \quad (15)$$

$P(r \in S_0 | s = 1100)$ 的表达式为

$$P_{T_{12}} = P_{c_1}\left[1 - Q\left(D_1 \sin \frac{5\pi}{12}\right)\right] \cdot \left[1 - Q\left(D_1 \sin \frac{\pi}{12}\right)\right] + P_{c_1}Q\left(D_1 \sin \frac{5\pi}{12}\right)Q\left(D_1 \sin \frac{\pi}{12}\right) \quad (16)$$

故 a_0 的判决错误概率为

$$P_e(a_0) = \frac{P_{T_0} + P_{T_4} + P_{T_8} + P_{T_{12}}}{4} \quad (17)$$

$P_e(a_0)$ 与 $P_e(a_2)$ 取平均就能得到 16APSK (4+12APSK) 的误码率, 即

$$P_b(4 + 12APSK) = \frac{P_e(a_0) + P_e(a_2)}{2} \quad (18)$$

根据模型公式, 可以得到不同半径比 γ 情况下 16APSK (4+12APSK) 的理论 BER 曲线, 如图 9 所示。为验证其准确性, 对不同 γ 下的 16APSK (4+12APSK) 的解调误码率进行 Monte Carlo 仿真。发送端平均功率为 1, 调制符号直接经过 AWGN 信道, 由于是无编码数据, 对于所有的半径比 γ , 无论其在表 1 中对应的最优码率是多少, 调制解调过程的码率均为 1。

图 10~图 12 分别以 $\gamma=2.57$ 、2.75、3.15 为例, 展示了模型公式与 Monte Carlo 仿真的对比结果, 结果显示其吻合度都非常好。

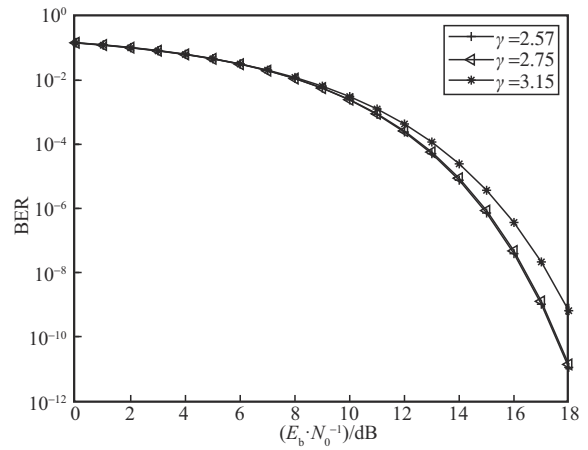


图 9 不同 γ 下 16APSK (4+12APSK) 的理论 BER 曲线

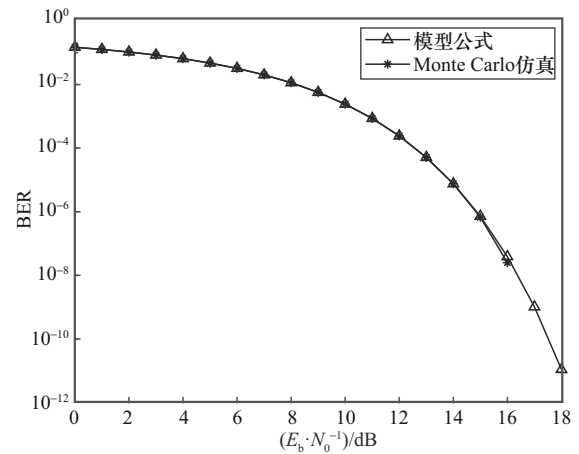


图 10 当 $\gamma=2.57$ 时模型公式与 Monte Carlo 仿真对比

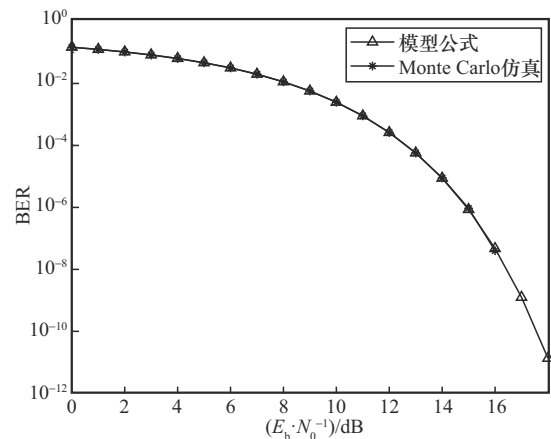


图 11 当 $\gamma=2.75$ 时模型公式与 Monte Carlo 仿真对比

此外, 利用模型公式可以很容易地分析出不同 γ 取值下 BER 性能随比特信噪比的变化细节, 并确定特定信噪比下的最优 γ 值, 这对星座优化设计具有重要的指导意义。

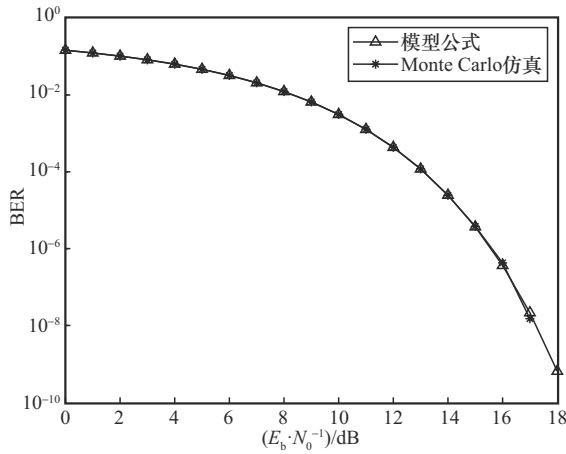


图12 当 $\gamma=3.15$ 时模型公式与Monte Carlo仿真对比

3.2 16APSK(8+8APSK)调制的BER计算

DVB-S2X 标准^[13-14]推荐的 16APSK(8+8APSK) 90/180 星座图如图 13 所示, 星座点分布在 2 个环上, 外环与内环半径比 $\gamma=2.19$ 。

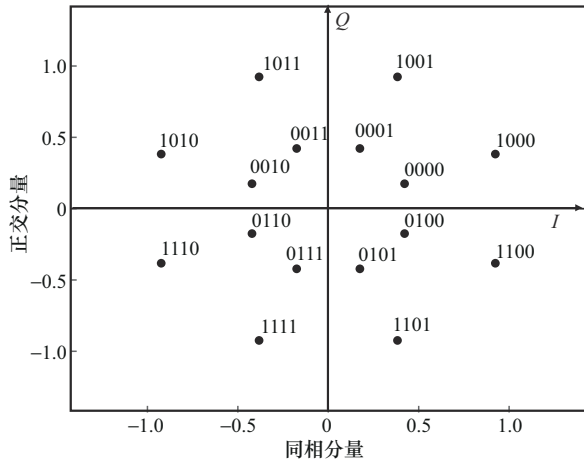


图13 DVB-S2X 16APSK(8+8APSK)90/180星座图

根据星座点分布位置容易得到, 16APSK (8+8APSK) 的内环半径 r_1 与平均比特能量 E_b 和半径比 γ 的关系为

$$r_1 = \sqrt{\frac{8E_b}{1 + \gamma^2}} \quad (19)$$

为简便起见, 令

$$D = \frac{r_1}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}} = \sqrt{\frac{16E_b}{(1 + \gamma^2)N_0}} \quad (20)$$

从星座图中可以看出, 每个环上 8 个星座点的相位及后 3 bit 的编码与 8PSK 完全相同, 因此关于 a_1 、 a_2 和 a_3 的比特判决区域划分与 8PSK 相同, 容

易得到其判决错误概率为

$$P_e(a_1) = P_e(a_2) = \frac{1}{4}Q\left(\gamma D \sin \frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{4}Q\left(\gamma D \sin \frac{3\pi}{8}\right) + \frac{1}{4}Q\left(D \sin \frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{4}Q\left(D \sin \frac{3\pi}{8}\right) \quad (21)$$

$$P_e(a_3) = \frac{1}{2} \left\{ Q\left(D \sin \frac{\pi}{8}\right) \left[1 - Q\left(D \sin \frac{3\pi}{8}\right) \right] + Q\left(D \sin \frac{3\pi}{8}\right) \left[1 - Q\left(D \sin \frac{\pi}{8}\right) \right] + Q\left(\gamma D \sin \frac{\pi}{8}\right) \left[1 - Q\left(\gamma D \sin \frac{3\pi}{8}\right) \right] + Q\left(\gamma D \sin \frac{3\pi}{8}\right) \left[1 - Q\left(\gamma D \sin \frac{\pi}{8}\right) \right] \right\} \quad (22)$$

16APSK (8+8APSK) 关于 a_0 的比特判决区域划分如图 14 所示, 阴影区域是 s_0 的比特判决区域 S_0 , 非阴影区域是 s_1 的比特判决区域 S_1 , S_0 和 S_1 以圆C为边界。同样, 圆C的半径是内外环半径的平均值。

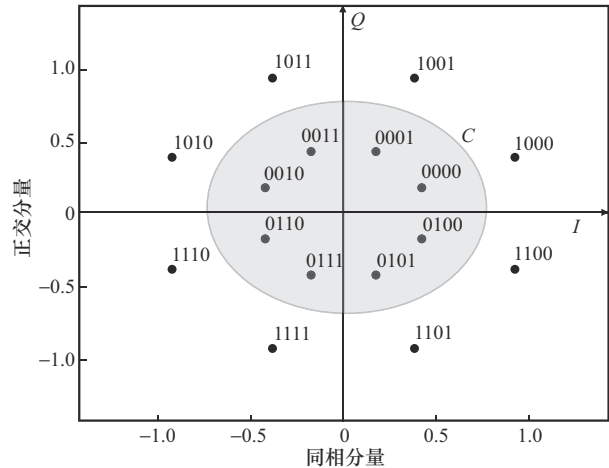


图14 16APSK(8+8APSK)关于 a_0 的比特判决区域划分

根据 3.1 节对 16APSK (4+12APSK) 中圆 C 的判决区域分析, 容易得到 a_0 的判决错误概率为

$$P_e(a_0) = \frac{1}{2} \left[Q\left(\frac{\gamma-1}{2} D\right) + Q\left(\frac{\gamma+3}{2} D\right) \right] + \frac{1}{2} \left[Q\left(-\frac{3\gamma+1}{2} D\right) - Q\left(-\frac{\gamma-1}{2} D\right) \right] \quad (23)$$

把式(21)~式(23)代入式(1)即得到 16APSK (8+8APSK) 的理论误码率计算公式, 即

$$P_b(8 + 8APSK) = \frac{P_e(a_0) + 2P_e(a_1) + P_e(a_3)}{4} \quad (24)$$

图 15 为模型公式与 Monte Carlo 仿真的对比结果, 结果显示其吻合度非常好。

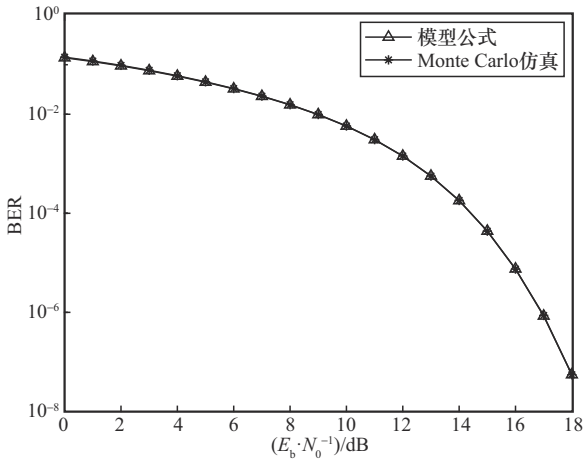


图 15 16APSK (8+8APSK)模型公式与 Monte Carlo 仿真对比

3.3 32APSK 调制的 BER 计算

DVB-S2X 标准推荐的 32APSK 2/3 星座图如图 16 所示, 星座点分布在 3 个环上, 中间环与最内环半径比为 $\gamma_1 = \frac{r_2}{r_1}$, 最外环与最内环半径比为 $\gamma_2 = \frac{r_3}{r_1}$ 。

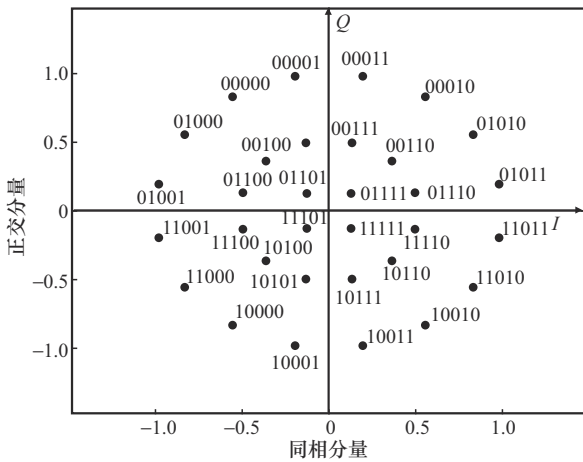


图 16 DVB-S2X 32APSK 2/3 星座图

32APSK 的最内环半径 r_1 与平均比特能量 E_b 和半径比 γ_1 、 γ_2 的关系为

$$r_1 = \sqrt{\frac{40E_b}{1 + 3\gamma_1^2 + 4\gamma_2^2}} \quad (25)$$

同样, 为简便起见, 令

$$D_{12} = \frac{r_1}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}} = \sqrt{\frac{80E_b}{(1 + 3\gamma_1^2 + 4\gamma_2^2)N_0}} \quad (26)$$

32APSK 的发送符号可表示为 $a_0a_1a_2a_3a_4$ 。根据对称性, 有 $P_e(a_3) = P_e(a_0)$, 因此只需考虑星座平面关于 a_0 、 a_1 、 a_2 和 a_4 的 4 种比特判决区域划分。而关于 a_0 的比特判决区域划分比较简单, 其 S_0 和 S_1 以 I 轴为区域边界。容易得到 a_0 的判决错误概率为

$$P_e(a_0) = \frac{1}{8} Q\left(D_{12} \sin \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 Q\left(\gamma_1 D_{12} \sin \frac{(2i-1)\pi}{12}\right) + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^4 Q\left(\gamma_2 D_{12} \sin \frac{(2i-1)\pi}{16}\right) \quad (27)$$

32APSK 关于 a_1 、 a_2 和 a_4 的比特判决区域划分分别如图 17~图 19 所示, 其中, 圆 C 的半径均是其相邻两环半径的平均值。与上述 16APSK 的推导方法一致, 可以得到这 3 个区域比特的判决错误概率分别为 $P_e(a_1)$ 、 $P_e(a_2)$ 和 $P_e(a_4)$, 再对各比特判决错误概率取平均即可得到 32APSK 的理论误码率计算公式, 此处不再赘述。

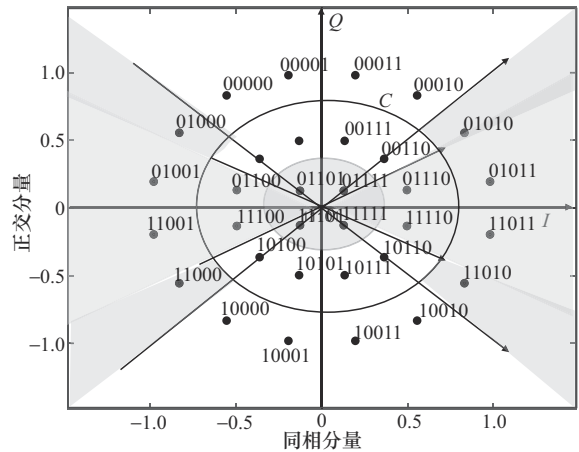


图 17 32APSK 关于 a_1 的比特判决区域划分

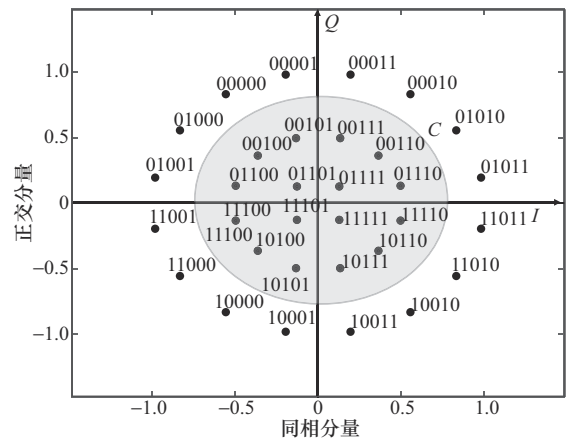


图 18 32APSK 关于 a_2 的比特判决区域划分

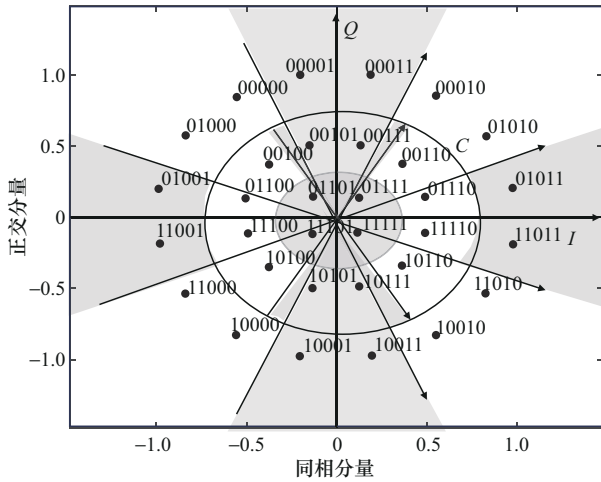


图 19 32APSK 关于 a_4 的比特判决区域划分

相较于 16APSK, 32APSK 的比特判决区域数目更多, 且区域边界更加不规则, 这直接导致了更大的分析与计算复杂度, 粗略测算其模型公式中各比特错误概率表达式所含 Q 函数的一次项、二次项和三次项的总数超过了 100 项。

图 20 为 32APSK 模型公式与 Monte Carlo 仿真的对比结果, 结果显示其吻合度非常好, 验证了该模型对高阶 APSK 调制的适用性。

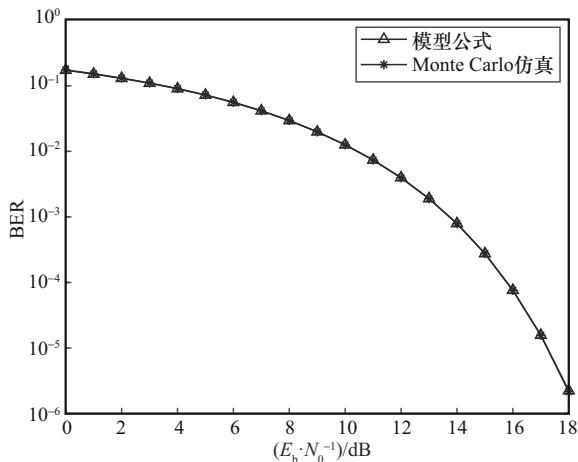


图 20 32APSK 模型公式与 Monte Carlo 仿真对比

4 结束语

本文基于全概率公式提出了一种误码率分析模型, 可有效评估 M-APSK 的传输误码率的理论性能。首先将 PSK 和 QAM 的模型公式与文献公式对比, 验证了模型的正确性与通用性。然后以 16APSK 和 32APSK 为例, 推导了其理论 BER 计算公式。模型公式与 Monte Carlo 仿真结果非常吻合,

表明该模型可以对 M-APSK 的理论误码率进行有效分析计算, 同时对 M-APSK 的星座优化设计具有一定指导意义。

参考文献:

- [1] PROAKIS J G, SALEHI M. Digital communications[M]. New York: McGraw-Hill, 2008.
- [2] PIL L. Computation of the bit error rate of coherent M-ary PSK with gray code bit mapping[J]. IEEE Transactions on Communications, 1986, 34(5): 488-491.
- [3] LU J H, LETAIEF K B, CHUANG J C I, et al. M-PSK and M-QAM BER computation using signal-space concepts[J]. IEEE Transactions on Communications, 1999, 47(2): 181-184.
- [4] LASSING J, STROM E G, AGRELL E, et al. Computation of the exact bit-error rate of coherent M-ary PSK with gray code bit mapping[J]. IEEE Transactions on Communications, 2003, 51(11): 1758-1760.
- [5] HANZO L, WEBB W T, KELLER T. Single and multi-carrier quadrature amplitude modulation[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2000.
- [6] YANG L L, HANZO L. A recursive algorithm for the error probability evaluation of M-QAM[J]. IEEE Communications Letters, 2000, 4(10): 304-306.
- [7] VITTHALADEVUNI P K, ALOUINI M S. BER computation of generalized QAM constellations[C]//Proceedings of the IEEE Global Telecommunications Conference. Piscataway: IEEE Press, 2001: 632-636.
- [8] CHO K, YOON D. On the general BER expression of one and two-dimensional amplitude modulations[J]. IEEE Transactions on Communications, 2002, 50(7): 1074-1080.
- [9] LU D X, ZHOU X, YANG Y Q, et al. Theoretical analysis of PAM-N and M-QAM BER computation with single-sideband signal[J]. Science China Information Sciences, 2021, 64(8): 182312.
- [10] TAMRAKAR B, SINGH K, JHA G, et al. Performance investigation of bit error rate using mostly utilized modulation schemes in RoF system for the next generation networks[C]//Proceedings of the 2023 International Conference on Power, Instrumentation, Energy and Control (PIECON). Piscataway: IEEE Press, 2023: 1-6.
- [11] ETSI EN 302 307-1 (v1.4.1). Digital video broadcasting (DVB); Second generation framing structure, channel coding and modulation systems for broadcasting, interactive services, news gathering and other broadband satellite applications; Part 1: DVB-S2[S]. European Telecommunications Standards Institute (ETSI), 2014.
- [12] ETSI TR 102 376-1 (v1.2.1). Digital video broadcasting (DVB); Implementation guidelines for the second generation system for broadcasting, interactive services, news gathering and other broadband satellite applications; Part 1: DVB-S2[S]. European Telecommunications Standards Institute (ETSI), 2015.
- [13] ETSI EN 302 307-2 (v1.3.1). Digital video broadcasting (DVB); Second generation framing structure, channel coding and modulation systems for broadcasting, interactive services, news gathering and other broadband satellite applications; Part 2: DVB-S2 Extensions (DVB-S2X) [S]. European Telecommunications Standards Institute (ETSI), 2021.
- [14] ETSI TR 102 376-2 (v1.2.1). Digital video broadcasting (DVB); Imple-

- mentation guidelines for the second generation system for broadcasting, interactive services, news gathering and other broadband satellite applications; Part 2: S2 Extensions (DVB-S2X)[S]. European Telecommunications Standards Institute (ETSI), 2021.
- [15] GAUDENZI R D, GUILLEN A, MARTINEZ A. Performance analysis of turbo-coded APSK modulations over nonlinear satellite channels[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2006, 5(9): 2396-2407.
- [16] 刘志新. APSK 星座优化设计及其调制解调研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2007.
LIU Z X. Optimal design of APSK constellation & study of its modulation and demodulation[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2007.
- [17] PARK J W, RYU C D, SUNWOO M H, et al. Simplified soft-decision demapping algorithm for DVB-S2[C]//Proceedings of the 2009 International SoC Design Conference (ISOCC). Piscataway: IEEE Press, 2009: 444-447.
- [18] 谢秋杨. 面向卫星通信高阶调制解调 16-APSK 算法实现研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2012.
XIE Q Y. Realization research on high order modulation and demodulation algorithm of 16-APSK for satellite communication[D]. Changsha: Hunan University, 2012.
- [19] 梅凡. 卫星数传系统中 16APSK 调制解调技术研究[D]. 北京: 中国科学院国家空间科学中心, 2016.
MEI F. The research of modulation and demodulation of 16APSK in satellite data transmission system[D]. Beijing: National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, 2016.
- [20] 穆怀强. DVB-S2 数字解调技术研究与实现[D]. 成都: 电子科技大学, 2019.
MU H Q. Research and implementation of DVB-S2 digital demodulation technology[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2019.
- [21] 郇浩, 任科学. M-APSK 鉴相算法与并行载波同步方法[J]. 通信学报, 2024, 45(3): 104-116.
HUAN H, REN K X. M-APSK phase detection algorithm and parallel carrier synchronization method[J]. Journal on Communications, 2024, 45(3): 104-116.
- [22] DAWA M, KADDOUM G, SATTAR Z. A generalized lower bound on the bit error rate of DCSK systems over multi-path Rayleigh fading channels[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2018, 65(3): 321-325.

[作者简介]



郇浩 (1983-), 男, 河南郑州人, 博士, 北京理工大学副教授、博士生导师, 主要研究方向为多维度信号与信息处理、空间电磁频谱感知、空天基特种通信等。



任科学 (1993-), 男, 河南周口人, 北京理工大学硕士生, 主要研究方向为数字信号处理、信息安全与对抗等。